

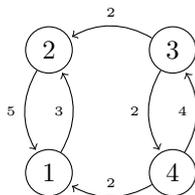
Ejercicios: 2^{do} Parcial

1. Sea $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ un proceso en tiempo discreto con $S_0 = 4$ y $\{X_n, n > 0\}$, i.i.d. uniformes sobre el conjunto $\{-9, 3, 6\}$.

a) Demuestra que el proceso $S_n^2 - 42n$ es una martingala.

(3 Puntos)

2. Dada la cadena de Markov con estados $\{1, 2, 3, 4\}$, diagrama



y distribución inicial $\nu(0) = (1/2, 0, 1/2, 0)$

- a) Caracterizar los estados y encontrar el generador de la cadena.
 b) Encontrar la matriz de transición de la cadena incrustada.
 c) Calcular la distribución límite si existe.
 d) El tiempo medio de permanencia en el estado 4.

(4 Puntos)

3. Sea $M(t) = 6 - t + 4B(t)$ con $B(t)$ el proceso Browniano estándar, y $T_x = \inf\{t : M(t) = x\}$.

- a) Calcula el valor de $\mathbb{E}[e^{0.5B(t)}]$
 b) Muestra que $e^{0.125M(t)}$ es una martingala.
 c) Calcula $\mathbb{P}(T_{-3} < T_{12})$.

(3 Puntos)